4. Continuidad de una función

4.1. Continuidad de una función en un punto

Una función es continua en un punto *x* = *a*, si se cumple que:

1. Existe *f*(*a*).
2. Existe $\lim_{x \to a} f(x)$
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

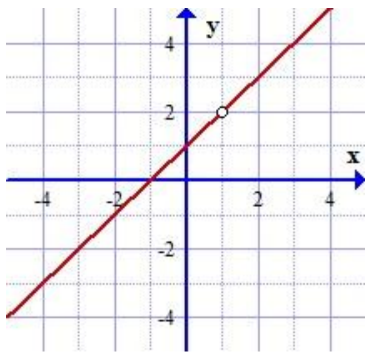
> Una función *f* es continua en un punto *x* = *a* de su dominio si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Se dice que la función *f* es **continua por la derecha** en un punto *x*= *a* si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Se dice que la función *f* es **continua por la izquierda** en un punto *x*= *a* si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

4.2. Tipos de discontinuidad

Si una función no es continua en un punto, decimos que la función presenta una discontinuidad en ese punto. Podemos encontrar varios tipos de discontinuidad:



a) Discontinuidad evitable. Se produce cuando existe $\lim_{x \to a} f(x)$, pero ocurre una de estas condiciones:

- La función no está definida en x = a.
- Existe *f*(*a*) pero $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

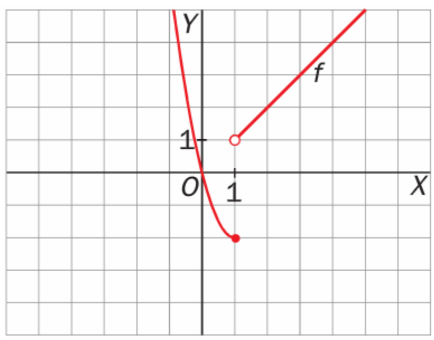
Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ tiene una discontinuidad evitable en x = 1, ya que existe $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$, pero no existe f(1). Podemos evitar la discontinuidad definiendo esta otra función:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq 1 \\ 2 & si \quad x = 1 \end{cases}$$

b) Discontinuidad de salto o de primera especie. Se produce cuando existen $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$, pero son diferentes, o si su valor es infinito.

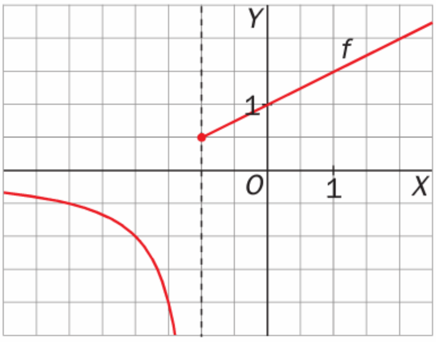
La función presenta una **discontinuidad de salto finito** en x = a si existen $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y son finitos pero no coinciden. Es el caso de la siguiente función en x = 1:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x & si \quad x \leq 1 \\ x & si \quad x > 1 \end{cases}$$



La función presenta una **discontinuidad de salto infinito** en x = a si uno de los límites laterales en *a*, o los dos, son infinito. Es el caso de la siguiente función en x = -1:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & si \quad x<-1\\[2mm] \dfrac{1}{2}x+1 & si \quad x\geq -1\end{cases}$$



c) Discontinuidad de segunda especie. Se produce cuando no existe alguno, o ninguno, de los límites laterales de la función en x = a.

4.3. Continuidad en un intervalo

Se dice que una función *f* es continua en un intervalo abierto (*a, b*) si y sólo si es continua en cada punto del intervalo.

Se dice que una función *f* es continua en un intervalo cerrado [*a, b*] si y sólo si es continua en el intervalo abierto (*a, b*) y, además, es continua por la derecha en *x* = *a* y continua por la izquierda en *x* = *b*.

4.4. Propiedades de la continuidad

Si las funciones f(x) y g(x) son continuas en x = a, entonces las siguientes funciones son continuas en x = a

- $f(x)\pm g(x)$
- $f(x)\cdot g(x)$
- $f(x)/g(x)$ siempre que $g(a)\neq 0$
- $k\cdot f(x)$ siendo $k\in\Re$

Además, siempre que g(x) sea continua en f(a):

- $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ es continua en *x* = *a*

NOTA: Con estas propiedades y lo estudiado hasta aquí, se deduce que las funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y todas sus funciones compuestas son continuas <u>en su dominio de definición</u>.